

$\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Supuesto
2. $P(x) \rightarrow Q(x)$	Elim. \forall (1) $\{x/x\}$
3. $\neg Q(x)$	Supuesto
4. $\neg P(x)$	MT. (2,3)
5. $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	Introd. \rightarrow (3-4)
6. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. \forall (5)
7. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. \rightarrow (1-6)
8. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Supuesto
9. $\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$	Elim. \forall (8) $\{x/x\}$
10. $P(x)$	Supuesto
11. $Q(x)$	MT. (9,10)
12. $P(x) \rightarrow Q(x)$	Introd. \rightarrow (10-11)
13. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Introd. \forall (12)
14. $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Introd. \rightarrow (8-13)
15. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$	Introd. \leftrightarrow (7,14) ■

$\vdash \exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

1. $\exists x \forall y P(x,y)$	Supuesto
2. $\forall y P(a,y)$	Elim. \exists (1) $\{x/a\}$
3. $P(a,y)$	Elim. \forall (2) $\{y/y\}$
4. $\exists x P(x,y)$	Introd. \exists (3)
5. $\forall y \exists x P(x,y)$	Introd. \forall (4)
6. $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$	Introd. \rightarrow (1-5) ■

$\vdash \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

1. $\forall y \exists x P(x,y)$	Supuesto
2. $\exists x P(x,y)$	Elim. \forall (1) $\{y/y\}$
3. $P(a,y)$	Elim. \exists (2) $\{x/a\}$
4. $\forall y P(a,y)$	Introd. \forall (3)
5. $\exists x \forall y P(x,y)$	Introd. \exists (4)
6. $\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$	Introd. \rightarrow (1-5) ■